



Варіант 1

(Початковий рівень)

1. (1 б) Знайдіть значення виразу $\log_2 36 - \log_2 9$

А) 4

Б) 2

В) 5

Г) Розв'язків не існує

Розв'язок:

$$\log_2 36 - \log_2 9 = \log_2 \frac{36}{9} = \log_2 4 = 2$$

2. (1 б) Обчисліть $8^{0,25 \log_8 81}$

А) 8

Б) 81

В) 3

Г) 4

Розв'язок:

$$8^{0,25 \log_8 81} = 8^{\log_8 81^{0,25}} = 8^{\log_8 81^{\frac{25}{100}}} = 8^{\log_8 81^{\frac{1}{4}}} = 8^{\log_8 \sqrt[4]{81}} = 8^{\log_8 3} = 3$$

3. (1 б) Знайдіть область визначення функції $y = \lg(16 - x^2)$

А) $(-16; 4)$

Б) $(-16; 16)$

В) $(-4; 16)$

Г) $(-4; 4)$

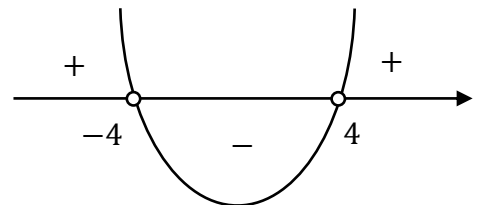
Розв'язок:

Так як логарифмічна функція виду $y = \log_a x$ $\left| \begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \right.$ може набувати тільки додатних значень, то:

$$\begin{aligned} y &= \lg(16 - x^2) \\ 16 - x^2 &> 0 \\ x^2 - 16 &< 0 \\ (x - 4)(x + 4) &< 0 \end{aligned}$$

*Так як знак нерівності «<», оберемо проміжок $(-4; 4)$

Відповідь: $(-4; 4)$





(Середній рівень)

4. (1 б) Розв'яжіть рівняння $\log_{25} x = -0,5$

Розв'язок:

$$\log_{25} x = -0,5$$

$$x = 25^{-0,5} = 25^{-\frac{5}{10}} = 25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Відповідь: 0,2

5. (1,5 б) Розв'яжіть нерівність $\log_4(x + 1) \geq 3$

Розв'язок:

$$\log_4(x + 1) \geq 3$$

$$\log_4(x + 1) \geq \log_4 64$$

$$x + 1 \geq 64$$

$$x \geq 63$$

Відповідь: $[63; +\infty)$

Достатній рівень

6. (1,5 б) Розв'яжіть рівняння $\log_{0,3}(3x - 1) = \log_{0,3}(x + 2)$

Розв'язок:

$$\log_{0,3}(3x - 1) = \log_{0,3}(x + 2)$$

$$\begin{cases} 3x - 1 = x + 2 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ x > -2 \end{cases}$$

Відповідь: 1,5

7. (1,5 б) Розв'яжіть нерівність $\log_{0,4}(3x - 6) > \log_{0,4}(2x + 2)$

Розв'язок:

$$\log_{0,4}(3x - 6) > \log_{0,4}(2x + 2)$$

$$\begin{cases} 3x - 6 < 2x + 2 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 8 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow 2 < x < 8$$

Відповідь: $(2; 8)$

Високий рівень

8. (1,5 б) Знайдіть суму коренів рівняння $\log_x 81 + \log_9 x^2 - 5 = 0$

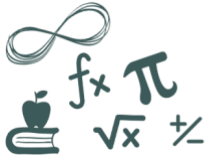
Розв'язок:

$$\log_x 81 + \log_9 x^2 - 5 = 0$$

$$\log_x 9^2 + \log_9 x^2 - 5 = 0$$

$$2 \log_x 9 + 2 \log_9 x - 5 = 0$$

$$2(\log_x 9 + \log_9 x) - 5 = 0$$



$$2\left(\log_x 9 + \frac{1}{\log_x 9}\right) - 5 = 0$$

Нехай $\log_x 9 = t$:

$$2\left(t + \frac{1}{t}\right) - 5 = 0$$

$$2t + \frac{2}{t} - 5 = 0 \quad (\cdot t)$$

$$2t^2 + 2 - 5t = 0$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_x 9 = 2 \\ \log_x 9 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\log_x 9 = 2$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

$x = -3$ – сторонній корінь, так як в основі логарифма не може бути від'ємне число

$$\log_x 9 = \frac{1}{2}$$

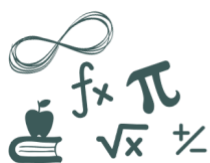
$$x^{\frac{1}{2}} = 9$$

$$\sqrt{x} = 9$$

$$x = 81$$

Отже, сума коренів: $3 + 81 = 84$

Відповідь: 84



Варіант 2

(Початковий рівень)

1. (1 б) Знайдіть значення виразу $\log_3 48 - \log_3 16$

А) 3

Б) 7

В) 1

Г) Розв'язків не існує

Розв'язок:

$$\log_3 48 - \log_3 16 = \log_3 \frac{48}{16} = \log_3 3 = 1$$

2. (1 б) Обчисліть $5^{0,5 \log_5 36}$

А) 6

Б) 5

В) 2

Г) 25

Розв'язок:

$$5^{0,5 \log_5 36} = 5^{\log_5 36^{0,5}} = 5^{\log_5 36^{\frac{1}{2}}} = 5^{\log_5 \sqrt{36}} = 5^{\log_5 6} = 6$$

3. (1 б) Знайдіть область визначення функції $y = \log_4(72 - 2x^2)$

А) $(-4; 6)$

Б) $(6; -4)$

В) $(-4; 4)$

Г) $(-6; 6)$

Розв'язок:

Так як логарифмічна функція виду $y = \log_a x \mid \begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}$ може набувати тільки додатних значень, то:

$$y = \log_4(72 - 2x^2)$$

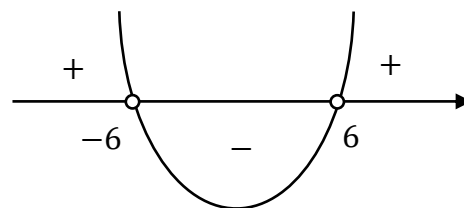
$$72 - 2x^2 > 0$$

$$x^2 - 36 < 0$$

$$(x - 6)(x + 6) < 0$$

*Так як знак нерівності «<», оберемо проміжок $(-6; 6)$

Відповідь: $(-6; 6)$





(Середній рівень)

4. (1 б) Розв'яжіть рівняння $\log_{16} x = -0,25$

Розв'язок:

$$\log_{16} x = -0,25$$

$$x = 16^{-0,25} = 16^{-\frac{25}{100}} = 16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Відповідь: 0,5

5. (1,5 б) Розв'яжіть нерівність $\log_2(x - 1) \geq 4$

Розв'язок:

$$\log_2(x - 1) \geq 4$$

$$\log_2(x - 1) \geq \log_2 16$$

$$x - 1 \geq 16$$

$$x \geq 17$$

Відповідь: $[17; +\infty)$

Достатній рівень

6. (1,5 б) $\log_{0,25}(2x + 3) = \log_{0,25}(x + 4)$

Розв'язок:

$$\log_{0,25}(2x + 3) = \log_{0,25}(x + 4)$$

$$\begin{cases} 2x + 3 = x + 4 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x > -4 \end{cases}$$

Відповідь: 1

7. (1,5 б) Розв'яжіть нерівність $\log_{0,45}(4x - 3) > \log_{0,45}(2x + 1)$

Розв'язок:

$$\log_{0,45}(4x - 3) > \log_{0,45}(2x + 1)$$

$$\begin{cases} 4x - 3 < 2x + 1 \\ 4x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x < 4 \\ 4x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow 0,75 < x < 2$$

Відповідь: $(0,75; 2)$

Високий рівень

8. (1,5 б) Знайдіть суму коренів рівняння $\log_x 512 + \log_8 x^3 - 10 = 0$

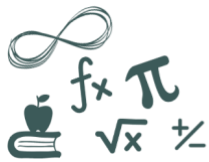
Розв'язок:

$$\log_x 512 + \log_8 x^3 - 10 = 0$$

$$\log_x 8^3 + \log_8 x^3 - 10 = 0$$

$$3 \log_x 8 + 3 \log_8 x - 10 = 0$$

$$3(\log_x 8 + \log_8 x) - 10 = 0$$



$$3\left(\log_x 8 + \frac{1}{\log_x 8}\right) - 10 = 0$$

Нехай $\log_x 8 = t$:

$$3\left(t + \frac{1}{t}\right) - 10 = 0$$

$$3t + \frac{3}{t} - 10 = 0 \quad (\cdot t)$$

$$3t^2 + 3 - 10t = 0$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$D = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_x 8 = 3 \\ \log_x 8 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\log_x 8 = 3$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

$$\log_x 8 = \frac{1}{3}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 8$$

$$\sqrt[3]{x} = 8$$

$$x = 512$$

Отже, сума коренів: $2 + 512 = 514$

Відповідь: 514